BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2014

УДК 517.977

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ ТИПА РОССЕРА

С.Ш. КАДЫРОВА, К.Б.МАНСИМОВ*,****
[*]Бакинский Государственный Университет
[**]Институт Систем Управления НАНА
mansimov@front.ru

В работе рассматривается одна задача оптимального управления дискретными системами Россера при помощи граничных управлений. Получено необходимое условие оптимальности первого порядка в форме линеаризованного условия максимума. Исследован случай вырождения линеаризованного условия максимума.

Ключевые слова: необходимое условие оптимальности, система Россера, дискретная система, линеаризованный принцип максимума, квазиособый случай.

Многие процессы из техники описываются дискретными системами типа Россера (см. напр. [1-8]).

В настоящей работе изучаются процессы, описываемые системами типа Россера и управляемые посредством выбора граничного условия.

Вычислено специальное приращение критерия качества и с его помощью сформулированы неявные критерии оптимальности первого и второго (квазиособый случай) порядков. Используя их, установлены, необходимые условия оптимальности, непосредственно выраженные через параметры поставленной задачи.

1. Постановка задачи. Допустим, что управляемый дискретный процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений

$$z(t+1,x)= f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right),\ \ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1;\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,x_1, \quad (1)$$

$$y(t,x+1)= g\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right),\ \ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1;\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1,$$

с краевыми условиями

$$z(t_0,x)=a(x),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1, \quad (2)$$

$$y(t,x_0)=b(t),\ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1.$$

Здесь $f(t,x,z,y)$ $\left(g(t,x,z,y)\right)$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,y) до второго порядка включительно, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданы, причем разности t_1-t_0 и x_1-x_0 – есть натуральные числа, $b(t)$ – заданная m-мерная дискретная вектор-функция, $a(x)$– n-мерная вектор-функция являющаяся решением нелинейного разностного уравнения

$$a(x+1)=F(x,a(x),u(x)),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1,$$

$$a(x_0)=a_0, \tag{3}$$

где $F(x,a,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a,u) до второго порядка включительно, a_0 – заданный постоянный вектор, $u(x)$ – r-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, выпуклого и ограниченного множества $U\subset R^r$, т.е

$$u(x)\in U\subset R^r,\qquad x\in X=\{x_0,x_0+1,\dots,x_1-1\}. \tag{4}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями, а соответствующий процесс $(u(x),a(x),z(t,x),\ y(t,x))$ допустимым процессом.

На решениях краевой задачи (1)-(3) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(v)=\varphi(a(x_1))+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}G_1(x,z(t_1,x_1))+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}G_2(t,y(t_1,x_1)). \tag{5}$$

Здесь $\varphi(a)$, $G_1(x,z)$, $G_2(t,y)$ – заданные скалярные функции непрерывные вместе с частными производными по вектору состояния до второго порядка включительно.

Задача заключается в минимизации функционала (5) при ограничениях (1)-(4).

Допустимое управление $u(x)$, доставляющий минимум функционалу (5), при ограничениях (1)-(4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(x),a(x),z(t,x),\ y(t,x))$ оптимальным процессом.

2. Вспомогательные результаты. Считая $(u(x),a(x),z(t,x),\ y(t,x))$ – фиксированным, допустимым процессом, введем обозначения

$$H(t,x,z,y,p,q)=p'f(t,x,z,y)+q'g(t,x,z,y),$$

$$M(x,a,u,\psi)=\psi'F(x,a,u),$$

где $p(t,x)$, $q(t,x)$ и $\psi(x)$ пока неизвестные вектор-функции.

Через

$$\Delta u_\mu(x)=\mu(v(x)-u(x)) \tag{6}$$

обозначим специальное приращение допустимого управления $u(x)$.

Здесь $\mu \in [0,1]$ произвольное число, а $v(x) \in U$, $x \in X$ – произвольное допустимое управление.

Через $(\Delta a_\mu(x), \Delta y_\mu(t,x), \Delta z_\mu(t,x))$, обозначим специальное приращение состояния $(a(x), y(t,x), z(t,x))$.

Теорема 1. При сделанных предположениях имеет место разложения

$$
\begin{gathered}
\Delta z_\mu(t,x) = \mu\,\ell(t,x) + o_1(\mu;\, t,x),\\
\Delta y_\mu(t,x) = \mu\, m(t,x) + o_2(\mu;\, t,x),\\
\Delta a(x) = \mu\,\alpha(x) + o_3(\mu; x).
\end{gathered} \tag{7}
$$

Здесь $(\ell(t,x), m(t,x), \alpha(x))$ – вариация вектора состояния, $(z(t,x), y(t,x), z(t_0,x))$ являющаяся решением задачи (аналог уравнения в вариациях)

$$
\begin{gathered}
\ell(t+1,x) = f_z(t,x,z(t,x),y(t,x))\ell(t,x) + f_y(t,x,z(t,x),y(t,x))m(t,x),\\
m(t,x+1) = g_z(t,x,z(t,x),y(t,x))l(t,x) + g_y(t,x,z(t,x),y(t,x))m(t,x),\\
\alpha(x+1) = F_a(x,a(x),u(x))\alpha(x) + F_u(x,a(x),u(x))(v(x)-u(x)),
\end{gathered} \tag{8}
$$

$$
\alpha(x_0) = 0, \quad m(t,x_0) = 0. \tag{9}
$$

Следуя, например работам [9-12], при помощи соотношений (6), (7) доказываются, что специальное приращение функционала $S(u)$ допускает следующие разложения:

$$
\begin{gathered}
S(u+\Delta u_\mu) - S(u) = -\mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_u'(x,a(x),u(x),\psi(x))(v(x)-u(x)) + \\
+\frac{\mu^2}{2}\left\{ \alpha'(x_1)\frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2}\,\alpha(x_1) + \right.\\
+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\ell(t_1,x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} m'(t,x_1)\frac{\partial^2 G_2(y,z(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1) -
\end{gathered} \tag{10}
$$

$$
\begin{gathered}
-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\ell'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial z^2}\ell(t,x) + \right.\\
+\ell'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial z\,\partial y}m(t,x) + \\
+m'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial y\,\partial z}\ell(t,x) + \\
\left. +m'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial y^2}m(t,x) \right] -
\end{gathered} \tag{11}
$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\alpha'(x)\frac{\partial^2 M(x,a(x),u(x),\psi(x))}{\partial a^2}\alpha(x)+2(v(x)-u(x))'\frac{\partial^2 M(x,a(x),u(x),\psi(x))}{\partial u\,\partial a}\times\right.$$

$$\left.\times\alpha(x)+(v(x)-u(x))'\frac{\partial^2 M(x,a(x),u(x),\psi(x))}{\partial u^2}(v(x)-u(x))\right]\Bigg\}+o(\mu^2).$$

3. Основные результаты. Из разложения (11) сразу следует

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_u'(x,a(x),u(x),\psi(x))(v(x)-u(x))\le 0\,, \tag{12}$$

выполнялось для всех $v(x)\in U$, $x\in X$.

Неравенство (12) является необходимым условием оптимальности первого порядка в форме линеаризованного условия максимума.

Непосредственным следствием теоремы 2 является следующее утверждение

Теорема 3. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$M_u'(\xi,a(\xi),u(\xi),\psi(\xi))(w-u(\xi))\le 0\,, \tag{13}$$

выполнялось для всех $\xi\in X$ и $w\in U$.

Неравенство (13) есть поточечное линеаризованное условие максимума.

Можно показать, что условия оптимальности (12) и (13) эквивалентны.

Изучим случай вырождения необходимого условия оптимальности (13).

Определение 1. Если для всех $\xi\in X$, $w\in U$

$$M_u'(\xi,a(\xi),u(\xi),\psi(\xi))(w-u(\xi))=0\,, \tag{14}$$

то допустимое управление $u(x)$ назовем квазиособым управлением.

Из разложения (11) следует, что для оптимальности квазиособого управления $u(x)$ в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы неравенство

$$\alpha'(x_1)\frac{\partial^2\varphi(a(x_1))}{\partial a^2}\alpha(x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\ell(t_1,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}m'(t,x_1)\frac{\partial^2 G_2(y,z(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\ell'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial z^2}\ell(t,x)+$$

$$+\ell'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial z\,\partial y}m(t,x)+ \tag{15}$$

$$+m'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial y\,\partial z}\ell(t,x)+$$

$$+m'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial y^2}m(t,x)\Bigg]-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\alpha'(x)\frac{\partial^2 M(x,a(x),u(x),\psi(x))}{\partial a^2}\alpha(x)+2(v(x)-u(x))'\frac{\partial^2 M(x,a(x),u(x),\psi(x))}{\partial u\,\partial a}\times$$

$$\times\alpha(x)+(v(x)-u(x))'\frac{\partial^2 M(x,a(x),u(x),\psi(x))}{\partial u^2}(v(x)-u(x))\Bigg]\geq 0,$$

выполнялось для всех $v(x)\in U$, $x\in X$.

Неравенство (15) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений.

Используя его, получим необходимое условие оптимальности квазиособых управлений выраженное непосредственно через параметры задачи (1) - (5) и пригодные для проверки.

Введем обозначения

$$F_u(x)=F_u(x,a(x),u(x),\psi(x)),\ \ H_{zz}(t,x)\equiv H_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$

$$M_u(x)=M_u(x,a(x),u(x),\psi(x)),\ \ H_{zy}(t,x)\equiv H_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$

$$H_{yy}(t,x)\equiv H_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$

$$f_y(t,x)\equiv f_y(t,x,z(t,x),y(t,x)),\qquad f_z(t,x)\equiv f_z(t,x,z(t,x),y(t,x)),$$

$$g_y(t,x)\equiv g_y(t,x,z(t,x),y(t,x)),\qquad g_z(t,x)\equiv g_z(t,x,z(t,x),y(t,x)).$$

Вернемся к уравнению в вариациях (8)-(9). Эта система является линейной системой уравнений относительно $(\alpha(x),\ell(t,x),m(t,x))$.

На основе формулы о представлении решений линейных неоднородных разностных уравнений (см напр. [13, с. 50-51, 14, с. 13-16]) $\delta z(t_0,x)$ представляется в виде

$$\alpha(x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)F_u(s)(v(s)-u(s)). \tag{16}$$

Здесь $\Phi(x,s)$ – $(n\times n)$ матричная функция являющаяся, решением задачи

$$\Phi(x,s-1)=\Phi(x,s)F_a(s),$$

$$\Phi(x,x-1)=E_1,\quad (E_1-(n\times n)\text{ единичная матрица}).$$

Далее, через $V_{ij}(t,x;\,\tau,s)$, $i=1,2$ обозначим решение задач

$$V_{11}(t,x;\,\tau-1,s)=V_{11}(t,x;\,\tau,s)f_z(\tau,s)+V_{12}(t,x;\,\tau,s)g_z(\tau,s),$$
$$V_{12}(t,x;\,\tau,s-1)=V_{11}(t,x;\,\tau,s)f_z(\tau,s)+V_{12}(t,x;\,\tau,s)g_y(\tau,s),$$
$$V_{21}(t,x;\,\tau-1,s)=V_{21}(t,x;\,\tau,s)f_z(\tau,s)+V_{22}(t,x;\,\tau,s)g_z(\tau,s),$$
$$V_{22}(t,x;\,\tau,s-1)=V_{21}(t,x;\,\tau,s)f_z(\tau,s)+V_{22}(t,x;\,\tau,s)g_z(\tau,s),$$
$$V_{11}(t,x;\,t-1,x-1)=E_1,\qquad V_{22}(t,x;\,t-1,x-1)=E_2,$$
$$V_{11}(t,x;\,t-1,s)=0,\quad x_0\le s\le x-2,\quad V_{12}(t,x;\,\tau,x-1)=0,\quad t_0\le\tau\le t-1,$$
$$V_{21}(t,x;\,t-1,s)=0,\quad x_0\le s\le x-1,\quad V_{22}(t,x;\,\tau,x-1)=0,\ t_0\le\tau\le t-2.$$

На основе результатов работы [15] получаем, что решение $(\ell(t,x),m(t,x))$ задачи (8)-(9) допускает представление

$$\ell(t,x)=V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,x)\alpha(x)+\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,s)\alpha(s),\tag{17}$$

$$m(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{21}(t+1,x;\,t_0-1,s)\alpha(s).\tag{18}$$

Отсюда принимая во внимание представление (16), для $\alpha(x)$ будем иметь

$$\begin{aligned}\ell(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Big[&V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,x)\Phi(x,s)F_u(s)+\\&+\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,\tau)\Phi(\tau,s)F_u(s)\Big]\,(v(s)-u(s)),\end{aligned}\tag{19}$$

$$m(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{21}(t+1,x;\,t_0-1,\tau)\Phi(\tau,s)F_u(s)\right](v(s)-u(s)).\tag{20}$$

Полагая

$$Q_1(t,x,s)=\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,\tau)\Phi(\tau,s)+V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,x)\Phi(x,s),$$

$$Q_2(t,x,s)=\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{21}(t+1,x;\,t_0-1,\tau)\Phi(\tau,s),$$

формулы (19), (20) записываются, соответственно, в виде

$$\ell(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x,s)F_u(s)(v(s)-u(s)),\tag{21}$$

$$m(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_2(t,x,s)F_u(s)(v(s)-u(s)).\tag{22}$$

Используя представления (16), (21), (22) займемся преобразованием членов неравенства (15). Следуя схемам работ [7, 10, 14, 16] и др. доказывается, что

$$\alpha'(x_1)\frac{\partial^2\varphi(a(x_1))}{\partial a^2}\alpha(x_1)= \tag{23}$$

$$=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}(v(s)-u(s))'F_u'(s)\Phi'(x_1,s)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x_1))}{\partial z^2}F_u(\tau)\Phi(x_1,\tau)(v(\tau)-u(\tau)),$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 G(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\ell(t_1,x)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1}(v(s)-u(s))'F_u'(s)Q_1'(t_1,x,s)\right)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 G(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\left(\sum_{\tau=x_0}^{x-1}Q_1(t_1,x,\tau)F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))\right)=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}(v(s)-u(s))'F_u'(s)\times \tag{24}$$

$$\times\left[\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_1'(t_1,x,s)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}Q_1(t_1,x,\tau)\right]F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau)).$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}m'(t,x_1)\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}(v(s)-u(s))'F_u'(s)Q_2'(t,x_1,s)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}Q_2(t,x_1,\tau)F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}(v(s)-u(s))'F_u'(s)\times$$

$$\times\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}Q_2'(t,x_1,s)\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}Q_2(t,x_1,\tau)\right]F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau)), \tag{25}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t,x)H_{zz}(t,x)\ell(t,x)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1}(v(s)-u(s))'F_u'(s)Q_1'(t,x,s)\right)H_{zz}(t,x)\times$$

$$\times\left(\sum_{\tau=x_0}^{x-1}Q_1(t,x,\tau)F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))\right)= \tag{26}$$

$$=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}(v(s)-u(s))'F_u'(s)\left\{\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_1'(t,x,s)H_{zz}(t,x)Q_1(t,x,\tau)\right\}F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau)),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t,x)H_{zy}(t,x)m(t,x)= \tag{27}$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x,s)F_u(s)(v(s)-u(s))\right)'H_{zy}(t,x)\left(\sum_{\tau=x_0}^{x-1}Q_1(t,x,\tau)F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))\right)=$$

$$=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}(v(s)-u(s))'F_u'(s)\left\{\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_1'(t,x,s)H_{zy}(t,x)Q_1(t,x,\tau)\right\}F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau)),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} m'(t,x)H_{yz}(t,x)\ell(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}(v(s)-u(s))'\,F_u'(s)\times$$

$$\times\left\{\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} Q_2'(t,x,s)H_{yz}(t,x)Q_2(t,x,\tau)\right\}F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau)),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} m'(t,x)H_{yy}(t,x)m(t,x)= \tag{28}$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}(v(s)-u(s))'\,F_u'(s)\left\{\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} Q_2'(t,x,s)H_{yy}(t,x)Q_2(t,x,\tau)\right\}F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau)).$$

Далее при помощи представления (16) получаем, что

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\alpha'(x)M_{aa}(x)\alpha(x)= \tag{29}$$

$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1}(v(s)-u(s))'\,F_u'(s)\Phi'(x,s)\right)M_{aa}(x)\left(\sum_{\tau=x_0}^{x-1}\Phi(x,\tau)F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))\right)=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}(v(s)-u(s))'\,F_u'(s)\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,s)M_{aa}(x)\Phi(x,\tau)\right\}F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau)),$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(v(x)-u(x))'\,M_{ua}(x)\alpha(x)=$$

$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1}(v(s)-u(s))M_{ua}(s)\Phi(s,x)\right]F_u(x)(v(x)-u(x)). \tag{30}$$

Введем в рассмотрение матричную функцию

$$K(\tau,s)=-\Phi'(x_1,s)\frac{\partial^2\varphi(a(x_1))}{\partial a^2}\Phi(x,\tau)-\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_1'(t_1,x,s)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\times$$

$$\times Q_1(t_1,x,\tau)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}Q_2'(t,x_1,s)\frac{\partial^2 G_2(t,z(t,x_1))}{\partial y^2}Q_2(t,x_1,\tau)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\big[Q_1'(t,x,s)H_{zz}(t,x)Q_1(t,x,\tau)+Q_1'(t,x,s)H_{zy}(t,x)Q_2(t,x,\tau)+$$

$$+Q_2'(t,x,s)H_{yz}(t,x)Q_1(t,x,\tau)+Q_2'(t,x,s)H_{yy}(t,x)Q_2(t,x,\tau)\big]+ \tag{31}$$

$$+\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{t_1-1}\Phi'(x,s)M_{aa}(x)\Phi(x,\tau).$$

С учетом тождеств (23)-(30), принимая во внимание обозначение

(31) в неравенстве (14), приходим к утверждению

Теорема 3. Для оптимальности квазиособого управления $u(x)$ в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}(v(s)-u(s))' F_u'(s)K(s,\tau)F_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1}(v(s)-u(s))' M_{ua}(s)\Phi(s,x)\right]F_u(x)(v(x)-u(x))+ \qquad (32)$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(v(x)-u(x))' M_{uu}(x)(v(x)-u(x))\le 0,$$

выполнялось для всех $v(x)\in U$, $x\in X$.

Неравенство (32) является многоточечным необходимым условием оптимальности второго порядка для квазиособых управлений.

Приведем одно следствие, вытекающее из теоремы 3.

Следствие 1. Для оптимальности квазиособого управления $u(x)$ в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы неравенство

$$(w-u(\xi))' [F_u'(\xi)K(\theta,\xi)F_u(\xi)](w-u(\xi))\le 0 \qquad (33)$$

выполнялось для всех $\xi\in X$, $w\in U$.

Заметим, что необходимое условие оптимальности (33) слабее чем (32).

ЛИТЕРАТУРА

1. Барышев В.Г., Блюмин С.Л. К управлению системами с многомерными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1977, № 4, с. 34-42.
2. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний // Автоматика и телемеханика, 1982, № 2, с. 125-163.
3. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах. Докл. АН СССР. 1967, т. 175, № 1, с. 17-19.
4. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск: Наука и техника, 1996, 199 с.
5. Roesser R.P. A discrete state-space model for linear image processing // IEEE Trans. Autom. Conttrol. 1975, v. AC-20, № 2, pp. 1-10.
6. Koczorek. Two-dimensional linear systems. Berlin. Springer-Verlag. 1985, 398 p.
7. Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем. // Дифференц. уравнения. 1991, № 2, с. 213-218.
8. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Минск. БГЭУ. 2005, 363 с.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М: Наука, 1973, 256 с.
10. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Елм. 1999, 174 с.
11. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М: Высшая школа. 2005, 335 с.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М: Наука,

1979, 429 с.
13. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск; БГУ, 1973, 256 с.
14. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2013, 151 с.
15. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. Об одном представлении решения линейных разностных уравнений типа Россера // Изв. НАН Азербайджана. Сер. Информатика и проблемы управления. 2013, № 3, с. 12-17.
16. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2010, 363 с.
17. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка // Препринт ИМ АН БССР. № 30 (155), Минск, 48 с.

BİR DİSKRET ROSSER SİSTEMLƏRİ İLƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ KVAZİMƏXSUSİ İDARƏLƏRİN OPTİMALLIĞI HAQQINDA

S.Ş.QƏDİROVA, K.B.MƏNSİMOV

XÜLASƏ

Məqalədə Rosser fərq tənlikləri sistemi ilə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. İdarə oblastının qabarıq olması şərti daxilində optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: optimallıq üçün zəruri şərt, Rosser sistemi, diskret sistem, xəttiləşdirilmiş maksimum şərti, kvaziməxsusi hal

ON ONE CONTROL PROBLEM OF DISCRETE ROESSER SYSTEMS

S.Sh.GADIROVA, K.B.MANSIMOV

SUMMARY

The paper deals with an optimal control problem described by a system of Roesser difference equations. Subject to the openness of the control domain, the necessary conditions are obtained in the terms of the first and second variations. Using these conditions, the necessary condition is obtained in the form of Euler equation. Later, the constructively verifiable necessary optimality conditions were described.

Key words: necessary optimality condition, Roesser system, discrete system, special variation of the functional, quasisingular case.

Поступила в редакцию: 01.10.2014 г.
Подписано к печати: 26.11.2014 г.